Коши тектес интеграл мысалдары

Айталық, L- кешен айнымалы z жазықтығының белгілі бір тұйық жатық контуры болсын. L контурының ішінде жатқан аймақты ішкі аймақ деп атап, $Д^+$ арқылы белгілейміз, ал $Д^+ + L$-ге қосымша аймақты сыртқы аймақ деп атап, $Д^-$арқылы белгілейміз.

Егер $f(z)$ функциясы $Д^+$ аймағында аналитикалық және $Д^+ + L$-де үзіліссіз болса, онда кешен айнымалының функциялары теориясындағы белгілі Коши формуласы бойынша

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(z), z \in Д^+, \\ 0, z \in Д^-, \end{cases} \tag{27}$$

ал егер $f(z)$ функциясы $Д^-$ аймағында аналитикалық және $Д^- + L$-де үзіліссіз болса, онда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(\infty), z \in Д^+, \\ -f(z) + f(\infty), z \in Д^-. \end{cases} \tag{28}$$

Мұнда L контурын жүрудің оң бағытын, кәдімгідей, $Д^+$ аймағының сол жақта қалатындай етіп таңдаймыз.

Коши формуласы аналитикалық функциялар үшін шекаралық есепті шешеді, өйткені шекарада оның мәні белгілі болса, онда Коши формуласы ол функцияның мәнін аймақтың әрбір нүктесінде есептеуге мүмкіндік береді. (27), (28) формулалардың сол жағындағы интеграл **Коши интегралы** деп аталады.

Айталық, L-толығымен жазықтықтың ақырлы бөлігіне орналасқан жатық тұйық немесе тұйық емес контур, τ-оның нүктелерінің кешен координаты және $\varphi(\tau)$-контур нүктелерінің үзіліссіз функциясы болсын. Онда Коши интегралы сияқты құрылған

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau \tag{29}$$

интегралы Коши тектес интеграл деп, $\varphi(\tau)$ функциясы оның тығыздығы, ал $\frac{1}{\tau - z}$ - өзегі деп аталады.

Тығыздығы $\varphi(\tau)$ үзіліссіз болатын Коши тектес интегралда интеграл астындағы функцияның z арқылы аналитикалық болмайтын нүктелері L интегралдау қисығының нүктелері болып табылады. Сонымен, L қисығы (29) $\Phi(z)$функциясы үшін ерекше сызық.

Егер L тұйық емес болса, онда $\Phi(z)$ тек L сызығынан басқа бүкіл жазықтықта аналитикалық функция болады. Енді L тұйық контур болсын.

Онда $\Phi(z)$ екі жеке функцияға жіктеледі: $Д^{+}$ аймағында анықталған $\Phi^{+}(z)$ және $Д^{-}$ аймағында анықталған $\Phi^{-}(z)$ функцияларына. Бұл функциялар бір-бірінің, жалпы алғанда аналитикалық жалғасы болмайды.

Бірін бірі толық жазықтыққа дейін толықтыратын $Д^{+}, Д^{-}$ аймақтарында жеке екі $\Phi^{+}(z), \Phi^{-}(z)$ өрнектерімен анықталған аналитикалық $\Phi(z)$ функциясын келешекте жиі **құрама-аналитикалық функция** деп атаймыз.

Коши тектес интегралдың мынадай маңызды қасиетін атап өтейік: (29) Коши тектес интеграл арқылы өрнектелген $\Phi(z)$ функциясы шексіз қашықтықтағы нүктеде нөлге айналады.

Шынында да, $\Phi(z)$ функциясын шексіз қашықтықтағы нүкте маңайында $\frac{1}{z}$ дәрежелері арқылы қатарға жіктейік. Ол үшін

$$\frac{\varphi(\tau)}{2\pi i}\frac{1}{\tau - z} = \left(-\frac{1}{z} - \frac{\tau}{z^{2}} - \ldots - \frac{\tau^{n-1}}{z^{n}} - \ldots\right)\frac{\varphi(\tau)}{2\pi i}$$

өрнегін мүшелеп интегралдап

$$\Phi^{-}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{z^{k}}$$

аламыз, мұндағы

$$C_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \tau^{k-1}\varphi(\tau)d\tau\ .$$

Ал бұл жіктеуде дәрежесі нөл мүше жоқ, сондықтан да бұдан $\Phi^{-}(\infty) = 0$ екені шығады.

Мысалы, тығыздығы $\varphi(\tau) = \frac{2}{\tau(\tau - 2)}$ болатын $|z| = 1$ шеңбері бойынша алынған Коши тектес интегралын есептейік, яғни

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{\tau - 2}\frac{d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{\tau - z}.$$

$\frac{1}{z-2}$ функциясы $Д^{+}$ аймағында, ал $\frac{1}{z}$ функциясы $Д^{-}$ аймағында аналитикалық және шексіздікте нөлге тең. (27) формула бойынша бірінші интеграл $z \in Д^{+}$ үшін $\frac{1}{z-2}$ –ге тең, ал $z \in Д^{-}$ –үшін нөлге тең. (28) формула бойынша екінші интеграл $z \in Д^-$ үшін $-\frac{1}{z}$ –ке тең де, ал $z \in Д^+$ үшін нөлге тең. Сонда

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z-2} \ , \qquad \Phi^-(z) = \frac{1}{z}$$

Коши тектес интегралдың шекаралық мәндері

Егер $\varphi(\tau)$ тығыздығы Гельдер шартын қанағаттандырса және t нүктесі интегралдау контурының ұштарына тең болмаса, онда контурдың $z = t$ нүктесі арқылы өткенде

$$\psi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau$$

функциясы үзіліссіз, яғни z-тің t–ге контурдың кез келген жағынан кез келген жолмен жақындауында $\psi(z)$ функциясының анықталған шектің мәні бар:

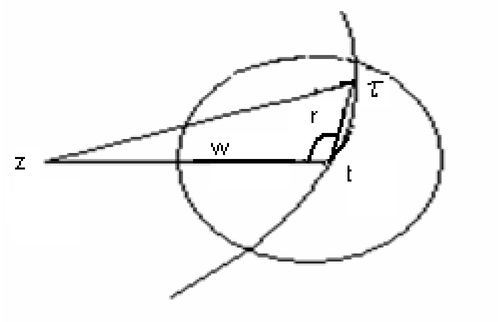
$$\lim_{z \to t} \psi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau = \psi(t).$$

Дәлелдеу үшін

$$\psi(z) - \psi(t) = \int_L (z-t) \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{(\tau - z)(\tau - t)} d\tau$$

айырымын бағалаймыз. Оны

$$\psi(z) - \psi(t) = I_1 + I_2$$



түрінде өрнектейік. Мұнда I_1 арқылы центрі t нүктесінде радиусы жеткілікті кішкене δ дөңгелек ішінде жатқан L контурының L_δ бөлігі арқылы алынған интеграл белгіленген, ал I_2 арқылы қалған $L - L_\delta$ бөлігі арқылы алынған интеграл белгіленген.

I_1 интегралын бағалайық. Алдымен z-тің t-ге ұмтылуы контурға жанама болмайтын белгілі бір жолмен жүргізілсін. Онда жеткілікті кішкене δ үшін t нүктесіндегі доғал емес ω бұрышының ω_0>0 төменгі шекарасы бар. $z + \tau$ үшбұрышына синустар теоремасын қолдансақ

$$\frac{|z-t|}{|\tau - z|} = \frac{\sin \beta}{\sin \omega} \le \frac{1}{\sin \omega_0} = K \qquad (1)$$

мұндағы K–белгілі бір оң сан.

Гельдер шарты бойынша

$$\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right| < Ar^{\lambda-1}, \qquad (2)$$

мұнда $r = |\tau - t|$.

L контурының жатықтығының мынадай қасиетін пайдаланамыз (§1, (10)): егер S –контур доғасының ұзындығы, ал оны керетін хорда ұзындығы r болса, онда жатық контур үшін $\frac{ds}{dr}$ қатынасы шектеулі шама, яғни

$$\left|\frac{ds}{dr}\right| \le m,$$

мұндағы m–оң тұрақты. Демек,

$$|d\tau| = |ds| \le m|dr|. \qquad (3)$$

Енді (1)-(3) бағалауларын қолдансақ:

$$|\mathrm{I}_1| \le \int_{L_\delta}\left|\frac{z-t}{\tau-z}\right|\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right||d\tau| < \mathrm{KA}\,m\int_{L_\delta} r^{\lambda-1}|dr| = 2KAm\int_0^\delta r^{\lambda-1}dr = 2KAm\,\delta^\lambda/\lambda$$

Мұнан кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін $|I_1| < \varepsilon/2$ болатындай δ санын әрқашан таңдап алуға болатынын көреміз. Енді осы таңдап алынған δ санын пайдаланып, I_2 интегралын бағалайық. I_2 интегралы t нүктесінде z арқылы үзіліссіз, өйткені $L - L_\delta$ контурында $\tau \ne t$. Үзіліссіздік анықтамасы бойынша жеткілікті аз $|z-t|$ үшін

$$|I_2| < \varepsilon/2$$

теңсіздігі орындалады. Сонымен,

$$|\psi(z) - \psi(t)| \le |I_1| + |I_2| < \varepsilon.$$

Енді z-тің t-ге контурға жанама емес жолмен ұмтылу шартынан құтылайық.

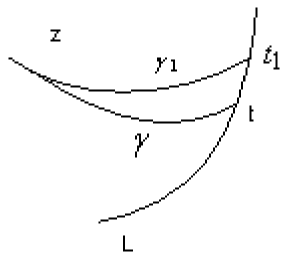
Жоғарыдағы бағалаудың t-ден тәуелсіз жүргізілгенін байқаймыз, демек, $\psi(z)$ өзінің $\psi(t)$ шегіне бірқалыпты ұмтылады. Мұнан $\psi(z)$ функциясының шекаралық мәні $\psi(t)$ үзіліссіз екені шығады. Шынында да, егер t, t_1 нүктелері L бойында жатқан болса, онда

$$\left|\Psi(z)-\Psi(t_1)\right| \le \left|\Psi(t)-\Psi(z)\right| + \left|\Psi(z)-\Psi(t_1)\right| \quad ,$$

ал $\psi(z)$ функциясының шекке ұмтылуының бірқалыптылығынан мұның оң жағындағы екі қосылғышты да жеткілікті аз етіп алуға болады, тек t,t_1, және z нүктелері бір-біріне жеткілікті жақын жатса болғаны.

Айталық, t-ге z нүктесі L-ге жанама болатын белгілі бір γ қисығы бойымен ұмтылсын. γ қисығы бойынан t-ге жеткілікті жақын z нүктесін алып, ол арқылы t нүктесіне жеткілікті жақын жатқан L бойының t_1 нүктесінен өтетін γ_1 қисығын жүргізейік және ол L қисығын жанамайтын болсын. zt және zt_1 хордаларының ұзындықтарының екеуі де бірге жеткілікті аз болатындай етіп γ_1 қисығын әрқашанда таңдап алуға болады. Бұл Н.И.Муехелишвилидің «Сингулярлық интегралдық теңдеулер» кітабында дәлелденген.

Енді жоғарыда дәлелденген жанама емес жол бойымен шектің бар болу тұжырымын қолданып және шектік мәндер үзіліссіздік қасиетін пайдаланып ,



$$|\psi(z)-\psi(t_1)| \text{ және } |\psi(t)-\psi(t_1)|$$

шамаларының жеткілікті аз екенін аламыз, сонда

$$|\psi(z)-\psi(t)| \le |\psi(z)-\psi(t_1)| + |\psi(t_1)-\psi(t)|$$

шамасы да жеткілікті аз болады, яғни кез келген жол бойымен шектік мән бар екені дәлелденеді.

Ескерту. $\psi(z)$ функциясының шегінің бар болуы төңіректік (локальдік) қасиет, яғни оның берілген t нүктесінде дұрыстығы осы нүкте маңайында $\varphi(\tau)$ тығыздығының қасиетінен шығады. Шынында да, оны дәлелдеуге Гельдер шартын қанағаттандырады деп ұйғарып, t нүктесін қоршаған жеткілікті кішкене доға бойынша алынған интегралды тікелей бағаладық. Ал $\psi(z)$ функциясының t нүктесінде үзіліссіздігі үшін контурдың қалған бөлігінде $\varphi(\tau)$ функциясының Гельдер шартын қанағаттандыруын өтінбейміз, оның тек үзіліссіз болса болғаны, тіпті үзілісті болсадағы болады, тек интегралдану шарты сақталса болғаны.

Коши тектес интеграл шегі мен ерекше интеграл байланысы. Сохоцкий формулалары

Айталық,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau \qquad (4)$$

болсын, мұндағы $\varphi(\tau) \in H^{\lambda}(L)$ және L контуры тұйық болсын. Егер контур тұйық болмаса, онда оны бойында $\varphi(\tau) = 0$ болатын белгілі бір қисықпен тұйықтаймыз.

$\Phi(z)$ функциясының белгілі бір t нүктесінде шектік мәндерін зерттеу үшін 1 пунктте талданған

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z}d\tau \qquad (5)$$

функциясын қарастырамыз. z нүктесінің L контурының t нүктесіне ішкі жағынан ұмтылғандағы $\Phi(z), \psi(z)$ аналитикалық функцияларының шектік мәндерін сәйкес $\Phi^{+}(t)$, $\psi^{+}(t)$ арқылы, ал сырт жағынан ұмтылғандағы мәндерін $\Phi^{-}(t)$, $\psi^{-}(t)$ арқылы белгілейміз. (Тұйық емес контур үшін бұл сәйкес сол жақтық шектік мән және оң жақтық шектік мән болады) Шекке көшу бағытын көрсету үшін сәйкес $z \to t^{+}$ немесе $z \to t^{-}$ деп жазамыз.Олардың t нүктесіндегі мәндерін $\Phi(t), \psi(t)$ арқылы белгілейміз әрі $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$ ерекше интегралын $\Phi(t)$ деп белгілейміз және оны бас мән мағынасында түсінетін боламыз.

Ал

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 2\pi i, z \in Д^{+}, \\ 0, z \in Д^{-}, \\ \pi i, z \in L \end{cases} \qquad (6)$$

теңдіктерін пайдаланып

$$\psi^{+}(t) = \lim_{z \to t^{+}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - z}\right] = \Phi^{+}(t) - \varphi(t),$$

$$\psi^{-}(t) = \lim_{z \to t^{-}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - z}\right] = \Phi^{-}(t),$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t)$$

екенін аламыз.

Негізгі лемма бойынша $\psi(t)$ үзіліссіз, демек, жазылған теңдіктердің оң жақтары тең, яғни

$$\Phi^{+}(t)+\varphi(t)=\Phi^{-}(t)=\Phi(t)-\frac{1}{2}\varphi(t). \tag{7}$$

Мұнан

$$\begin{aligned}\Phi^{+}(t)&=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,\\ \Phi^{-}(t)&=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\end{aligned} \tag{8}$$

және ерекше интегралды бас мән мағынасында түсінетін боламыз. Бұл формулаларды **Сохоцкий формулалары** деп атайды. Сонымен біз мынадай нәтижеге келдік.

Теорема. Айталық L-тұйық немесе тұйық емес жатық контур, ал $\varphi(\tau)$-Гельдер шартын қанағаттандыратын контур нүктелерінің функциясы болсын. Онда

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

Коши тектес интегралының контурға оң жағынан да немесе сол жағынан да жақындауда, оның ұштарынан басқа барлық нүктелерде $\Phi^{+}(t)$, $\Phi^{-}(t)$ шектік мәндері бар және бұл шектік мәндер $\varphi(t)$ интеграл тығыздығы мен $\Phi(t)$ ерекше интеграл көмегімен (8) Сохоцкий формулалары арқылы өрнектеледі.

Ескерту. (8) формулаларды өзара қосып және шегеріп, практикада жиі қолданатын, оларда Сохоцкий формулалары деп аталатын

$$\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)=\varphi(t), \tag{9}$$

$$\Phi^{+}(t)+\Phi^{-}(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \tag{10}$$

формулаларын аламыз.